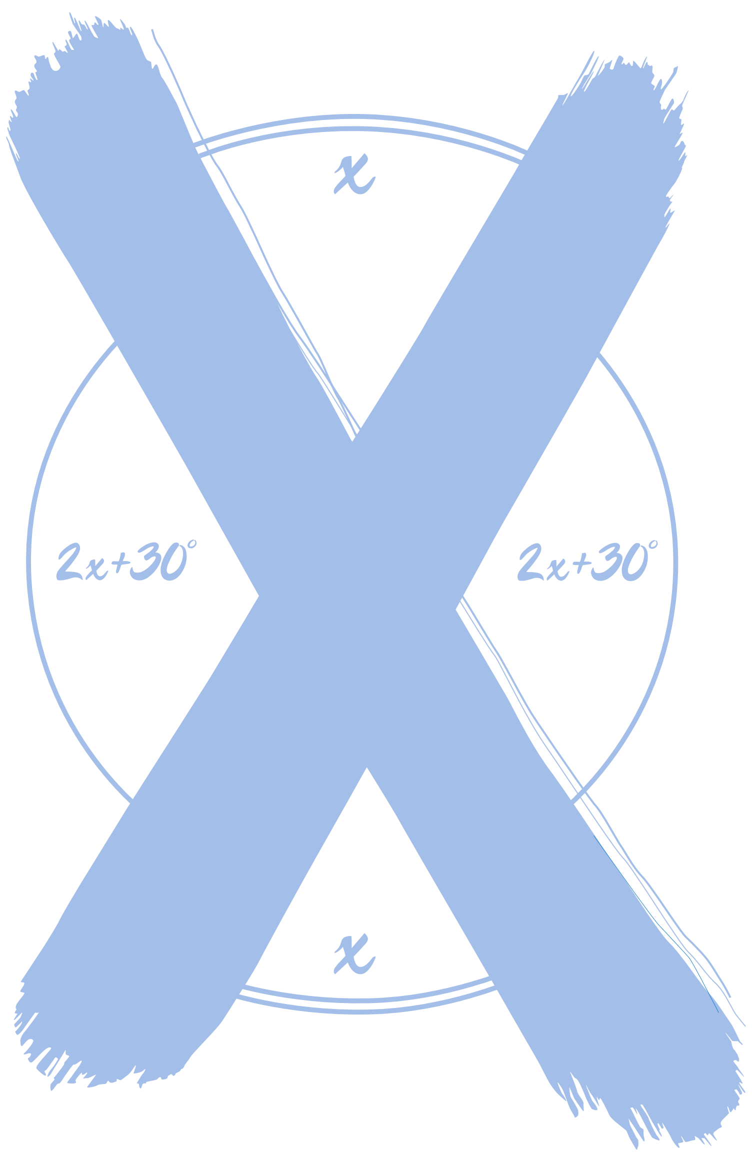
MATEMATIKA (NE)LENGVAI

BRONISLOVAS BURGIS

9–10 KLASEI



TEORIJA, PAVYZDŽIAI, UŽDAVINIAI

ŠVIESA

TURINYS

PRATARMĖ 4
ĮRODYMAI 6
TYRIMAI 14
(NE)LENGVOS TEMOS 24
1. Skaičiai. Skaitiniai reiškiniai 24
2. Algebriniai reiškiniai 30
3. Procentai 33
4. Tiesė ir parabolė 36
5. Algebrinės lygtys 40
6. Algebrinės nelygybės 45
7. Įvairios lygtys, nelygybės ir jų sistemos 49
8. Planimetrija 52
9. Stereometrija 64
10. Trigonometrija 69
11. Kombinatorika ir tikimybių teorija 74
12. Žodiniai uždaviniai 81
ĮSIVERTINIMO TESTAI 86
1 testas 86
2 testas 87
3 testas 88
4 testas 89
5 testas 90
6 testas 91
7 testas 92
8 testas 93
9 testas 94
10 testas 95
ATSAKYMAI 96

PRATARMĖ

– Norėčiau, kad matematika su manimi kalbėtų žmonių kalba, – sako mokinys. – Matematikai taip griežtai viską sudėlioja, kad, rodos, nušaus, jei tik žengsi žingsnelį į šoną. O juk yra su matematika susijusių knygų, kurias tiesiog malonu skaityti, pavyzdžiui: Simon Singh „Fermat‘s Last Theorem“ ir „The Simpsons and their Mathematical Secrets“, Marcus du Sautoy „The Number Mysteries“, Denis Guedj „Papūgos teorema“ ir daug kitų.

– Ateis laikas ir tu suprasi, jaunasis žmogau, – sako mokytojas, – kad gyvenime labai praverčia griežtumas ir tikslumas. Jeigu Pitagoro teorema tai galiotų, tai negaliotų, jei apie ją tik kas nors papasakotų, bet neišmokytų taikyti, tai visi žmonės gyventų apytiksliai. Net dabar apytiksliai gyvenančių daug.

Šioje knygoje pabandysime suderinti tuos du dalykus. Rasite laisvo stiliaus pokalbių įvairiomis matematikos temomis. Kartais grybštelėsime ir tas temas, kurių pradinėse gimnazijos klasėse (vidurinės mokyklos 9 ir 10 klasėse) nemoko. Neišgąsdinsime. Juk nebūtina iškart išspręsti visus šios knygos uždavinius!

Kita vertus, mokymo programos gali pasikeisti ir kai kurios temos gali būti perkeltos į žemesnes klases. Be to, vis daugiau mokinių išvyksta mokytis į kitas šalis. Gali būti, kad tose šalyse matematikos programos gerokai skiriasi nuo mūsiškių. Įsidėkite į lagaminą šią knygą, pravers!

Rasite įvairiausių išspręstų uždavinių ir spręsti parengtų uždavinių sąlygų. Bus tikslių atsakymų, bet bus ir apytikslių – kaip gyvenime.

Prisiminkite, kad išspręsti – tai padaryti kažką tokio, ko dar nedarei. Ne pakartoti tai, ką jau darei! Todėl, pamatę uždavinio sąlygą šioje knygoje, neskubėkite sakyti: „Mes tokių dar nesimokėme.“ Klauskite savęs taip: „Ar turiu pakankamai priemonių uždaviniui nagrinėti?“ Keliai, kuriais eisite, gali būti visai nežinomi. Tai juk įdomu!

Kaip naudotis šia knyga?

Pradėkite nuo skyriaus **„Įrodymai“**. Čia rasite ir jums žinomų įrodymų, ir tikrai vieną kitą tokį, kokio dar nematėte. Kai kurie įrodymai pravers (galime sakyti – bus būtini) sprendžiant uždavinius, kurių spręsti mokykloje dar nemokė arba mokė šiek tiek kitaip...

Paskui pastudijuokite skyrių **„Tyrimai“**. Jame visi uždaviniai išspręsti ir pateikta nemažai komentarų, kaip jie išspręsti. Tai lyg nedidelė mokomoji knyga.

Kiekvienas tolesnis skyrius prasideda nedidele apžvalgėle **„Ką reikia prisiminti?“**: vienu kitu naudingu patarimu, pamokymu, formule... Po jos – keletas išspręstų uždavinių. O tada jau uždaviniai, kuriuos spręsite patys.

Retkarčiais norėsite pasitikrinti, kiek ir ko jau išmokote. Atsiverskite **„Įsivertinimo testus“**. Dešimt testų po dešimt uždavinių. Ir testą pasirinkite atsitiktinai, ir uždavinius spręskite ne iš eilės – taip geriau suprasite, kiek esate pasirengę netikėtumams, kurių tikrai bus, kai nueisite į egzaminą.

Knygos gale rasite **uždavinių atsakymus**. Nesupykite, jei vienas kitas bus su klaida – autorius atsiprašo ir pasiteisina, kad labai seniai mokėsi mokykloje...

Ačiū Jums, kad pasirinkote šią knygą!

Bronislovas Burgis

ĮRODYMAI

Ką reikia prisiminti?

Ar matematikoje viskas turi būti įrodyta? Ne, ne viskas. Gal jūs galite įrodyti, kad per tašką, esantį šalia tiesės, galima nubrėžti tik vieną tiesę, lygiagrečią su duotąja tiese? Kitiems nepavyko įrodyti... Atsirado teigiančių, kad galima nubrėžti kiek norima tiesių arba kad negalima nubrėžti nė vienos. Pasidomėkite, kas taip teigė ir kas iš to sukurta.

Šiame skyriuje įrodysime tai, ką galima įrodyti, patikrinti. Jokios tvarkos neieškokite – čia ne vadovėlis. Tiesiog pasimėgaukite.

Tai, ką rasite šiame skyriuje, tikrai pravers sprendžiant kitų skyrių uždavinius.

Panagrinėkite šiuos įrodymus, patarimus, uždavinių sprendimus.

1.

Kaip dešimtainę periodinę trupmeną paversti paprastąja?

Tai paprasta! Pažiūrėkite:

$$0{,}0(23) = \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \ldots$$

Dešiniojoje lygybės pusėje yra nykstamosios geometrinės progresijos suma, bet jums to žinoti nereikia. Užtenka žinoti, kad, susumavę visus narius iki begalybės (gal pabandykite?), gausime:

$$S = \frac{b_1}{1 - q};$$

čia b_1 – pirmasis dėmuo $\left(\text{šiuo atveju } b_1 = \frac{23}{1000}\right)$, q – skaičius, iš kurio reikia padauginti kiekvieną dėmenį, kad gautume paskesnį dėmenį $\left(\text{šiuo atveju } q = \frac{1}{100}\right)$.

Verčiame periodinę dešimtainę trupmeną paprastąja:

$$0{,}0(23) = \frac{\frac{23}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{990}.$$

Ir viskas! Patikrinkite.

Dar du pavyzdžiai:

$$0{,}(12) = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \ldots = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33};$$

$$15{,}(7) = 15 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots = 15 + \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 15 + \frac{7}{9} = 15\frac{7}{9}.$$

2.

Aptarkime, kokiais trimis būdais galima nubraižyti funkcijos $y = x^2 - 2x - 3$ grafiką.

Pirmas būdas

Randame lygties $x^2 - 2x - 3 = 0$ sprendinius:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3}; \qquad x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Suprantama, kad parabolės viršūnės abscisė yra pusiaukelėje tarp –1 ir 3, taške 1. Įrašę šią reikšmę į funkcijos išraišką, sužinome parabolės viršūnės koordinates: $A(1; -4)$. Per turimus tris taškus brėžiame parabolę.

Šis būdas nepatogus tada, kai kvadratinės lygties sprendiniai yra „negražūs“ skaičiai, pavyzdžiui,

$$y = 2x^2 - 7x - 5; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 40}}{4}; \quad x_1 = \frac{7 - \sqrt{89}}{4}, x_2 = \frac{7 + \sqrt{89}}{4}.$$

Antras būdas

Pertvarkome funkciją taip, kad galėtume pritaikyti grafikų transformacijos būdą:

$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

Dabar reikia atlikti tris veiksmus:

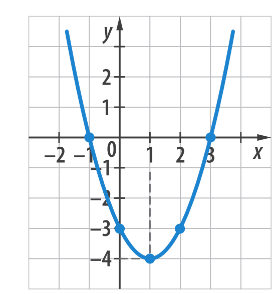
a) nubraižyti funkcijos $y = x^2$ grafiką;
b) pastumti šį grafiką per vienetą abscisių ašies kryptimi (galima pastumti ordinačių ašį per vienetą į kairę);
c) pastumti b etape gautą grafiką per keturis vienetus žemyn (galima pakelti abscisių ašį per keturis vienetus aukštyn).

Nepanašu, kad jūs šiuo būdu neverčiami braižytumėte kvadratinės funkcijos grafiką, tiesa?

Trečias būdas

Geriausiai tinka šis būdas!

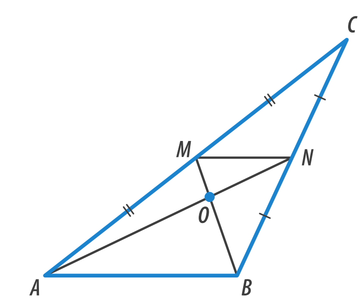
Įrašome į funkcijos išraišką $y = -3$. Gauname lygtį $x^2 - 2x = 0$. Ją mintinai (dabar aišku, kodėl pasirinkome $y = -3$!) išsprendę gauname: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Suprantama, kad parabolės viršūnės abscisė yra pusiaukelėje tarp 0 ir 2, taške 1. Įrašę šią reikšmę į funkcijos išraišką, apskaičiuojame parabolės viršūnės koordinates: $A(1; -4)$. Per turimus tris taškus brėžiame parabolę. Ir jokios grėsmės, kai kvadratinės lygties sprendiniai yra „negražūs“ skaičiai!



Rezultatą matome paveikslėlyje dešinėje.

3.

Įrodykime, kad trikampio pusiaukraštinės dalija viena kitą santykiu 1 : 2.



Nubrėžkime dvi trikampio ABC pusiaukraštines: AN ir BM. (Analogiškai įrodytume, jei nubrėžtume ir trečią pusiaukraštinę – nagrinėtume pirmą ir trečią arba antrą ir trečią pusiaukraštines.)

Trikampiai ABC ir MNC yra panašūs (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų), todėl matome, kad trikampio vidurinė linija MN yra lygiagreti su trikampio kraštine AB ir $MN = \frac{1}{2}AB$.

Vadinasi, ir trikampiai AOB bei MON yra panašūs (jų kampai atitinkamai lygūs), o tai reiškia, kad jų atitinkamų kraštinių ilgiai yra proporcingi. Taigi

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OM} = 2.$$

Teorema įrodyta.

TYRIMAI

Ką reikia prisiminti?

Kaip išmokti spręsti? Spręsti uždavinius, problemas. Spręsti apie knygą, paveikslą, filmą, žmogų... Žinoma, reikia turėti kuo daugiau žinių, žinoti kuo daugiau faktų, bet dar svarbiau – būti skaičius, girdėjus, mačius, kaip sprendė išsilavinę žinovai. Kiekvienas žmogus sprendžia skirtingai, todėl ir mokytis reikia iš skirtingų žmonių. Jūs jau pastebėjote: vienus vadovėlius skaityti lengva, kitus – sunku, nuobodu.

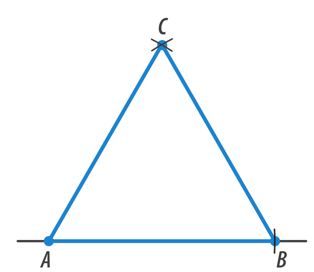
Dabar perskaitykite uždavinius, kuriuos sukūrė šios knygos autorius, ir pasimokykite juos spręsti taip, kaip sprendė autorius. Gal patiks?

Panagrinėkite šiuos uždavinių sprendimus.

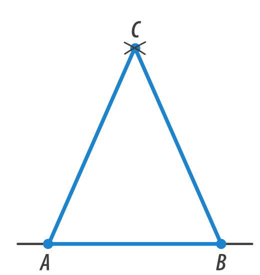
1.

Kaip, turint tik skriestuvą ir liniuotę be padalų, nubrėžti:
a) lygiakraštį trikampį;
b) lygiašonį trikampį;
c) dvi statmenas tieses?

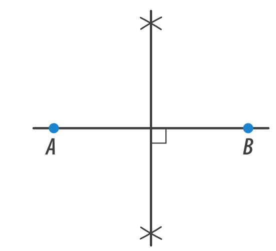
a) Nubrėžiame tiesės atkarpą. Laisvai pasirinktame tiesės taške A įsmeigiame skriestuvo kojelę su adatėle ir, skriestuvo žingsnį nustatę tokį, kokio ilgio norime trikampio kraštinių, pažymime du lankelius: nubrėžtoje atkarpoje (taškas B – būsimoji trikampio viršūnė) ir ties numanoma trečiosios trikampio viršūnės vieta. Nekeisdami skriestuvo žingsnio, įsmeigiame skriestuvo kojelę su adatėle taške B ir nubrėžiame lankelį taip, kad jis susikirstų su anksčiau nubrėžtu lankeliu ties numanoma trečiosios viršūnės (taško C) vieta. Tiesiomis atkarpomis sujungiame taškus A ir B su lankelių sankirtos tašku C.



b) Nubrėžiame tiesės atkarpą. Joje pažymime trikampio pagrindą AB. Nustatę skriestuvo žingsnį tokį, kokio ilgio norime trikampio šoninių kraštinių, įsmeigiame kojelę su adatėle taške A ir brėžiame lankelį ties numanoma viršūne C. Įsmeigiame kojelę su adatėle taške B ir brėžiame lankelį ties numanoma viršūne C. Tiesiomis atkarpomis sujungiame taškus A ir B su lankelių sankirtos tašku C.



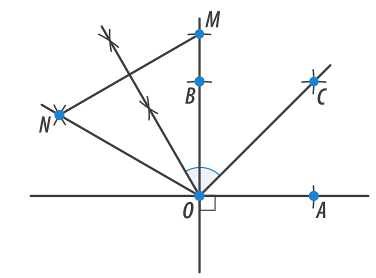
c) Nubrėžiame tiesės atkarpą. Laisvai pasirinktame atkarpos taške A įsmeigiame skriestuvo kojelę ir, laisvai pasirinkę skriestuvo žingsnį, brėžiame lankelius vienoje ir kitoje tiesės pusėje. Perkeliame įsmeigiamąją kojelę į kitą atkarpos tašką B ir brėžiame lankelius taip, kad jie susikirstų su anksčiau nubrėžtaisiais. Sujungiame lankelių sankirtos taškus tiesia atkarpa.



2.

Kaip, turint tik skriestuvą ir liniuotę be padalų, nubraižyti 75° kampą?

Nubrėžiame dvi statmenas tieses (ar jau mokate tai padaryti?). Iš jų sankirtos taško O skriestuvu, nekeisdami atstumo tarp jo kojelių, brėžiame lankelius – pažymime taškus A ir B (žr. pav.).



Nekeisdami atstumo tarp skriestuvo kojelių, iš taškų A ir B brėžiame lankelius, pažymėdami tašką C. Keturkampis $OACB$ yra kvadratas (iš tiesų tai rombas, nes keturios jo kraštinės yra vienodo ilgio, bet statusis kampas BOA paverčia jį kvadratu – nebūna rombų nei su vienu, nei su dviem, nei su trimis stačiaisiais kampais), todėl $\angle BOC = 45°$.

Iš taško O sukuriame bet kokio dydžio lygiakraštį trikampį: iš pradžių skriestuvu pažymime atkarpą OM ir, nekeisdami skriestuvo žingsnio, iš taško O pažymime lankelį ties numanomu tašku N; tada iš taško M užfiksuojame taško N padėtį.

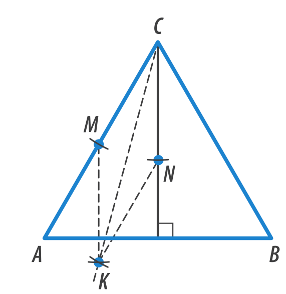
Tereikia nubrėžti statmenį per kraštinės MN vidurį. Iš taškų M ir N atstumu, didesniu už pusę kraštinės MN ilgio, abiejose tos kraštinės pusėse pažymime lankelius ir per jų sankirtos taškus nubrėžiame trikampio NOM aukštinę. Prie viršūnės O gauname 30° kampą, kuris kartu su kampu BOC ir sudaro 75° kampą.

3.

Kaip, turint tik skriestuvą ir liniuotę be padalų, nubraižyti 15° kampą?

Pateikiame tik algoritmą. Kaip jį realizuoti, lengvai sugalvosite patys.

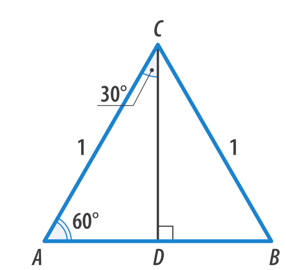
Nubraižome lygiakraštį trikampį ABC ir jo aukštinę (ji kartu yra ir pusiaukampinė) iš viršūnės C. Pusės kampo prie viršūnės C didumas yra 30°. Pusė to kampo ir yra 15° kampas.



4.

Apskaičiuokite sin 30°, cos 60°, sin 60°, cos 30°, tg 30°, tg 60°, sin 45°, cos 45°, tg 45° reikšmes.

Nubraižome lygiakraštį trikampį ABC, sutardami, kad jo kraštinių ilgiai yra po 1. Nubrėžiame to trikampio aukštinę CD. Žinodami, kad aukštinė yra ir pusiaukraštinė, matome (taip, matome!):



$\sin 30° = \frac{AD}{AC}$; $\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$; $\cos 60° = \frac{AD}{AC}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

Pritaikome Pitagoro teoremą ir gauname dar keletą reikšmių:

$CD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

(NE)LENGVOS TEMOS

1 SKAIČIAI. SKAITINIAI REIŠKINIAI

Ką reikia prisiminti?

Kaip pamatyti, kad $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$?

Dabar tai nesunku, nes matome, ką iš kairiojoje lygybės pusėje parašyto skaitinio reiškinio turime gauti: pakeliame abi lygybės puses kvadratu ir bematant įsitikiname, kad lygybė teisinga.

Gerokai sunkiau, kai turime tik $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Reikia pamatyti, kad $2\sqrt{6} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$, o tai primena dvigubą sandaugą formulėje $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Vadinasi,

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Taigi, sprendžiant uždavinius su skaitiniais reiškiniais, prireiks ir greitosios daugybos formulių, ir veiksmų su šaknimis, laipsniais taisyklių, ir net tokių paprastų dalykų: paversti paprastąją trupmeną baigtine dešimtaine trupmena, pavyzdžiui,

$$\frac{4}{5} = 0{,}8,$$

paversti paprastąją trupmeną periodine dešimtaine trupmena, pavyzdžiui,

$$\frac{2}{7} = 0{,}(285714),$$

paversti periodinę dešimtainę trupmeną paprastąja (žr. skyrių „Įrodymai“).

Šioje temoje rasite ir jums žinomų dalykų, ir gal dar negirdėtų: kiek padidėja arba sumažėja dvejetainis skaičius, jei jo skaitmenis sukeičiame vietomis? Kaip skaičių paverčiame skaitiniu reiškiniu?

Būkite atidūs: lyginio laipsnio šaknis iš neneigiamo skaičiaus yra neneigiamas skaičius.

Akivaizdu, kad $(5-3)^2 = (3-5)^2$, bet $\sqrt{(5-3)^2} = 5-3 = 2$, o $\sqrt{(3-5)^2} \neq 3-5$.

Ar jau mokate spręsti kvadratinę lygtį? Ar jau mokate spręsti uždavinius su trupmeniniais laipsniais? Jei dar nemokate, atidėkite šiuos uždavinius vėlesniam laikui.

Panagrinėkite šiuos uždavinių sprendimus.

1.
Yra žinoma, kad $a > b$, $a < c$, $d > b$, $d < c$. Bandykite išrikiuoti šiuos elementus nuo mažiausio iki didžiausio ir paaiškinkite, kokios informacijos trūksta, kad galėtumėte tai padaryti.

Atsakymas. b, d, a, c arba b, a, d, c. Trūksta d ir a palyginimo.

2.
Po daugelio metų vyras susitiko buvusią savo klasės draugę.
– Turiu šeimą, auginu tris vaikus, – pasakoja moteris.
– Kokio amžiaus tavo vaikai? – klausia vyras.
– Jei sudaugintume skaičius, kurie nurodo vaikų amžių, gautume 36, – sumanė pajuokauti moteris.
– Negaliu pasakyti tų trijų skaičių, trūksta informacijos. Gal pasakytum, kokia tų skaičių suma?
– Jei ir pasakysiu sumą, vis tiek negalėsi išsiaiškinti, kokio amžiaus mano vaikai.
– O, tai palengvina sprendimą! Pasakyk dar nors kokią sąsają tarp skaičių.
– Vyriausia dukra mėgsta šunis.
– Dabar žinau, kokio amžiaus tavo vaikai! – apsidžiaugė vyras.
Jūs pasakykite, kokio amžiaus vaikai.

Daugindami tris skaičius (turime galvoje – natūraliuosius), sandaugą 36 galime gauti įvairiais būdais:

1, 2, 18; 1, 4, 9; 2, 3, 6; ...

Visais atvejais skaičių trejetų suma yra skirtinga (patikrinkite!), išskyrus du atvejus:

$1+6+6=13$; $2+2+9=13$.

Tik antruoju atveju moteris galėjo pasakyti: „Vyriausia dukra...“ Tai ir padėjo vyrui užbaigti sprendimą.

Atsakymas. 2 metų; 2 metų; 9 metų.

3.
Iš triženklio skaičiaus A atėmę jo skaitmenų sumą gauname 675. Koks yra triženklis skaičius A?

Nesunku pastebėti, kad ieškomas triženklis skaičius yra ne didesnis už 699. Užrašykime jį taip: $\overline{6ab}$. Vadinasi,

$6\cdot 100 + a\cdot 10 + b - (6+a+b) = 675$; $9a = 81$; $a = 9$.

Toliau nagrinėjame taip:

$\overline{69b} - \overline{xx} = 675$.

Pabandome atspėti. Jei $b = 7$, tai skaičiaus A skaitmenų suma yra $\overline{xx} = 22$ ir lygybė teisinga. Tačiau tai ne vienintelis galimas variantas! Vietoj b tinka visi skaitmenys nuo 0 iki 9. Įsitikinkite!

Atsakymas. $\overline{69b}$, $b = 0, 1, ..., 9$.

4.
Kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius a, jei $a = 2^{42}$?

Sudarykime tokią lentelę:

Laipsnio rodiklis	2	3	4	5	6	7	8	9
Paskutinis skaitmuo	4	8	6	2	4	8	6	2

Matome, kad paskutinis skaitmuo kartojasi kas ketvirtas: 4, 8, 6, 2 ir vėl 4, 8, 6, 2...